On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 3 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E_8 (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics)

AUTHOR(S):

亀子, 正喜; 三村, 護

数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 95-103

On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 3 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E_8

富山国際大学 亀子正喜 (Masaki Kameko)

(Toyama University of International Studies),

Comenius 大学数学物理学部 三村護 (Mamoru Mimura)

(Department of Algebra, Faculty of Mathematics-Physics-Informatics,

Comenius University, Bratislava, Slovakia)

1 はじめに

G を連結コンパクト Lie 群, BG をその分類空間とする. 以下, 簡単のため X の mod 3 コホモロジーを H^*X とかくことにする. また, 具体的な Lie 群をあげて話を進めてゆくことにする.

古典群の分類空間のコホモロジーにおいては極大トーラス T の分類空間のコホモロジーとそのコホモロジーへの Weyl 群 $W_G(T)$ (トーラスの正規化群 $N_G(T)$ をトーラスの中心化群 $C_G(T)$ でわったもの) の作用による不変式環が決定的な役割をはたす. たとえば G がユニタリ群 $U(n)$ の場合, T は $U(n)$ の対角行列全体になり, Weyl 群 W は n 次の対称群になる. 分類空間のコホモロジーの間の誘導準同型の像はこの Weyl 群の不変式環と一致し次の同型が成り立つ.

$$H^*BU(n) \xrightarrow{\simeq} (H^*BT)^W = \mathbf{F}_3[x_1, \cdots, x_n]^W.$$

しかしながら例外 Lie 群の分類空間を考えると状況は違ってくる. たとえば $G = F_4$ の場合, 分類空間 BF_4 の mod 3 コホモロジーは戸田 [3] により計算されているが, 古典群の分類空間の mod 3 コホモロジーとの最も大きな違いは奇数次元の非自明な元の存在である. それゆえに上の

ような極大トーラスの分類空間のコホモロジーへの埋め込みを期待することはできない.

極大トーラスを基本アーベル 3-部分群 E に置き換えた場合にも E の Weyl 群 $W_G(E) = N_G(E)/C_G(E)$ を考えて誘導準同型

$$H^*BG \longrightarrow H^*BE^{W_G(E)}$$

が得られる. また Quillen [4] により

$$q : H^*BG \to \lim_{\leftarrow} H^*BE$$

が F-同型である（ $q^{-1}(0)$ がべき零元からなり, $\lim\limits_{\leftarrow} H^*BE$ の元のべきは q の像に含まれる）ことが知られている. しかし, 古典群の場合, 基本アーベル 3-部分群は極大トーラスの部分群と共役であり, 上の準同型はなにも新しい情報をもたらしてくれない.

一方, 例外 Lie 群の場合には, たとえば $G = F_4$, E_6, E_7, E_8 に関しては極大トーラスの部分群にならないような基本アーベル 3-部分群の存在が知られておりこのような non-toral な基本アーベル 3-部分群を用いれば H^*BG について極大トーラスだけからは得られないような情報が得られる可能性がある. たとえば F_4 には non-toral な rank 3 の基本アーベル 3-部分群が共役をのぞいてただひとつ存在する. これを A とかくことにする. このとき

$$H^*BF_4 \to H^*BT \times H^*BA$$

は単射になることが（出版されていないが） Adams-河野, Broto などにより知られている.

ここでは $G = E_8$ の場合のある基本アーベル 3-部分群の mod 3 コホモロジーの不変式環の計算とその H^*BE_8 への応用を述べる.

2 Rothenberg-Steenrod スペクトル系列

分類空間のコホモロジーの計算のための道具として Rothenberg-Steenrod スペクトル系列がある. これは E_2 項が

$$\mathrm{Cotor}_{H^*G}(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3)$$

で H^*BG に収束する. 例外リー群 $G = F_4$, E_6, E_7, E_8 に関してこの E_2 項は計算されており, さらに $G = F_4$, E_6, E_7 に関してはこのスペクトル

系列は E_2 項で退化する（ $E_2 = E_\infty$ が成り立つ）ことが知られているのですくなくとも次数つきのベクトル空間としての構造はわかっている．このような事実を踏まえると, $G = E_8$ の場合もこのスペクトル系列は退化すると期待されるのであるが, これが退化しないことがある基本アーベル 3-部分群の分類空間の mod 3 コホモロジーの不変式環を調べることによりわかる．

定理 1 H^*BE_8 に収束する *Rothenberg-Steenrod* スペクトル系列

$$\mathrm{Cotor}_{H^*E_8}(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3) \Rightarrow gr\ H^*BE_8$$

は退化しない．

この定理 1 の証明には次の 3 つの事実を用いる．

(A) G をコンパクト Lie 群, A を G の部分群, $G \subset U(N)$ を Lie 群の埋め込みとする．誘導準同型

$$H^*BU(N) \to H^*BG \to H^*BA$$

で H^*BA を $H^*BU(N)$-加群とみたとき H^*BA は $H^*BU(N)$-加群として有限生成である．（ Quillen [4] Theorem 2.1 を参照.）

(B) E_8 はつぎのような行列全体からなる Weyl 群 $W \subset GL(5, \mathbf{F}_3)$ をもつ rank 5 の基本アーベル 3-部分群 A をもつ．

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \epsilon_1 & * & * & * & * \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & g & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array}\right)$$

ただし $*$ は任意の $\mathbf{F}_3$ の元を表すとし, $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \in \mathbf{F}_3^\times$, $g \in SL(3, \mathbf{F}_3)$ とする．（ Andersen 他 [1] Theorem 8.15 を参照．この論文では A は $E_{E_8}^{5a}$ と表記されている.）

(C) $\mathrm{Cotor}_{H^*E_8}(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3)$ は $\mathbf{F}_3$ 上の次数つき代数として次数 168 以下の 29 個の元から生成される．(Mimura-Sambe [2] を参照．)

$\sqrt{0}$ で H^*BA のべき零元の全体を表す．(A) から H^*BA, $H^*BA/\sqrt{0}$, $(H^*BA/\sqrt{0})^W$ はすべて $H^*BU(N)$-加群として有限生成で Noether 加群になる．

(B) から不変式環を計算すると

$$(H^*BA/\sqrt{0})^W = \mathbf{F}_3[b_4, b_{26}, b_{36}, b_{48}, b_{324}]$$

ここで添え字はコホモロジーの次数を表す．この不変式環の計算は次の節で行う．また (C) から，もしも Rothenberg-Steenrod スペクトル系列が退化すれば H^*BE_8 は次数 168 以下の元から生成されることがわかる．したがって誘導準同型 $H^*BE_8 \to (H^*BA/\sqrt{0})^W$ は生成元の次数を考えれば

$$H^*BE_8 \to \mathbf{F}_3[b_4, b_{26}, b_{36}, b_{48}] \to \mathbf{F}_3[b_4, b_{26}, b_{36}, b_{48}, b_{324}] = (H^*BA/\sqrt{0})^W$$

と分解することになり $(H^*BA/\sqrt{0})^W$ は $H^*BU(N)$-加群として有限生成ではなくなってしまう．それゆえに，はじめの仮定「Rothenberg-Steenrod スペクトル系列が退化する」が成り立たないことになる．

3 不変式環

$\mathbf{F}_q$ を元の個数が q 個の有限体とする．V を $\mathbf{F}_q$ 上の $m+n$ 次元ベクトル空間とし，その基底を $\{v_1, \cdots, v_{m+n}\}$ とする．V^* を V の双対とし，$\{x_1, \cdots, x_{m+n}\}$ を V^* の $\{v_1, \cdots, v_{m+n}\}$ の双対基底とする．V_1, V_2 を V の部分空間で $\{v_1, \cdots, v_m\}$, $\{v_{m+1}, \cdots, v_{m+n}\}$ で生成されているものとする．$\mathbf{F}_q[V]$ で多項式環 $\mathbf{F}_q[x_1, \cdots, x_{m+n}]$ を表す．$G_1 \subset GL(m, \mathbf{F}_q)$, $G_2 \subset GL(n, \mathbf{F}_q)$ がそれぞれ V_1, V_2 へ作用しているものとする．ここでは G は

$$g = \left(\begin{array}{c|c} g_1 & * \\ \hline 0 & g_2 \end{array}\right)$$

の形の行列全体とし，その V への作用はこの行列による作用を考える．群 G_1, G_2, G の V_1, V_2, V への作用は $\mathbf{F}_q[V_1]$, $\mathbf{F}_q[V_2]$, $\mathbf{F}_q[V]$ への作用を誘導する．

群 G_1, G_2 の不変式環 $\mathbf{F}_q[V_1]^{G_1}$, $\mathbf{F}_q[V_2]^{G_2}$ がそれぞれ

$$a_1, \cdots, a_m,$$
$$a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}$$

を変数とする多項式環になっている場合を考える．すなわち

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_q[V_1]^{G_1} &= \mathbf{F}_q[a_1,\cdots,a_m],\\ \mathbf{F}_q[V_2]^{G_2} &= \mathbf{F}_q[a_{m+1},\cdots,a_{m+n}]\end{aligned}$$

とする．ここで

$$\begin{aligned}a_i &= a_i(x_1,\cdots,x_m) & (i=1,\cdots,m),\\ a_j &= a_j(x_{m+1},\cdots,x_{m+n}) & (j=m+1,\cdots,m+n)\end{aligned}$$

である．さらに，

$$\mathcal{O}(X)=\prod_{x\in V_2^*}(X+x)\in \mathbf{F}_q[V][X]$$

とおく．これを用いて

$$\begin{aligned}a'_i &= a_i(\mathcal{O}(x_1),\cdots,\mathcal{O}(x_m)) & (i=1,\cdots,m),\\ a'_j &= a_j(x_{m+1},\cdots,x_{m+n}) & (j=m+1,\cdots,m+n)\end{aligned}$$

とおく．

定理 2 上の条件のもとで G の不変式環 $\mathbf{F}_q[V]^G$ は $a'_1,\cdots,a'_{m+n}$ を変数とする多項式環である．

まずこれを用いて前節の不変式環 $(H^*BA/\sqrt{0})^W$ の計算を行っておく．

$$H^*BA/\sqrt{0}=\mathbf{F}_3[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5].$$

ここでは $x_1,\cdots,x_5$ は H^2BA の元であるのでその次数は 2 である．

$$G_1=\{\epsilon_1\},\quad G_2=\left\{\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & g & & 0\\ & & & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\end{array}\right)\right\}$$

とおくと不変式環は $\mathbf{F}_3[x_2,x_3,x_4]$ の Dickson invariant $c_{3,k}$ を用いてかくことができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_3[x_1]^{G_1} &= \mathbf{F}_3[x_1^2],\\ \mathbf{F}_3[x_2,x_3,x_4,x_5]^{G_2} &= \mathbf{F}_3[b_4,b_{26},b_{36},b_{48}].\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} b_4 &= x_5^2, \\ b_{26} &= e_3(x_2, x_3, x_4), \\ b_{36} &= c_{3,2}(x_2, x_3, x_4), \\ b_{48} &= c_{3,1}(x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

で e_3 は $e_3^2 = c_{3,0}$ となる多項式である. Dickson invariant $c_{3,k}$ の多項式としての次数は $3^3 - 3^k$ であるがここでは $x_1, \cdots, x_5$ を次数 2 としているので上の b の次数は b の添え字と同じになる. 上の定理 2 により

$$\mathbf{F}_3[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^G = \mathbf{F}_3[(\mathcal{O}(x_1))^2, b_4, b_{26}, b_{36}, b_{48}]$$

となる. $(\mathcal{O}(x_1))^2$ の次数は定義から 324 になる.

最後に定理 2 の証明を述べる.

有限体上の多項式環 $\mathbf{F}_q[x_1, \cdots, x_n]$ の G の不変式環の計算に関してはつぎの定理 3 にもとづいた方針が Wilkerson [5] の論文に説明されている. われわれはこの方針にもとづいて定理 2 を証明する.

定理 3 V を $\mathbf{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間, $G \subset GL(V)$ とする. G-不変な n 個の斉次多項式 $f_1, \cdots, f_n$ があって次の条件 (1), (2) を満たすとき G の不変式環は $f_1, \cdots, f_n$ を変数とする多項式環

$$\mathbf{F}_q[V]^G = \mathbf{F}_q[f_1, \cdots, f_n]$$

である.

(1) $f_1, \cdots, f_n$ から生成される部分代数を B とすると $B \subset \mathbf{F}_q[V]$ は整拡大である.

(2) $\deg f_1 \cdots \deg f_n = |G|$. ただし, $\deg x_1 = \cdots = \deg x_n = 1$ とする.

逆に, $\mathbf{F}_q[V]^G$ が $f_1, \cdots, f_n$ を変数とする多項式環になっているようであれば上の条件 (1), (2) が成り立つ.

まず定理 2 の $a'_1, \cdots, a'_{m+n}$ が G-不変であることを確認する.

$a'_{m+1}, \cdots, a'_{m+n}$ が G-不変なのは自明なので, 以下 $i = 1, \cdots, m$ とし, $a'_1, \cdots, a'_m$ が G-不変であることを示す.

$$g = \left(\begin{array}{c|c} g_1 & * \\ \hline 0 & g_2 \end{array}\right) \in G$$

とし,

$$g_1 x_i \;=\; \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}(g_1)x_j \quad (a_{j,i}(g_1) \in \mathbf{F}_q)$$

とおくと

$$gx_i \;=\; g_1 x_i + h(g, x_i)$$

となる $h(g,x_i) \in V_2^*$ がある. また $x \in V_2^*$ のとき $gx \in V_2^*$ も明らかである. $c_{n,k}$ を $\mathbf{F}_q[x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}]$ の Dickson invariant, $c_{n,n} = 1$ とすると

$$\mathcal{O}(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_{n,k} X^{q^k}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
g\mathcal{O}(x_i) &= g\prod_{x \in V_2^*}(x_i + x) \\
&= \prod_{x \in V_2^*}(\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}(g_1)x_j + h(g,x_i) + gx) \\
&= \prod_{x' \in V_2^*}(\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}(g_1)x_j + x') \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_{n,k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}(g_1)x_j\right)^{q^k} \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}(g_1)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_{n,k}x_j^{q^k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{j,i}\mathcal{O}(x_j)
\end{aligned}$$

a_i が G_1-不変であることから

$$\begin{aligned}
ga'_i &= ga_i(\mathcal{O}(x_1), \cdots, \mathcal{O}(x_m)) \\
&= a_i(\sum_{j=1}^{m} a_{j,1}(g_1)\mathcal{O}(x_j), \cdots, \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}(g_1)\mathcal{O}(x_j)) \\
&= a'_i.
\end{aligned}$$

つぎに B を $a'_1, \cdots, a'_{m+n}$ で生成される $\mathbf{F}_q[x_1, \cdots, x_{m+n}]$ の部分代数とし, $x_1, \cdots, x_{m+n}$ が B 上整であることを示す.

$x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ が B 上整であることは明らかなのでここでも $i = 1, \cdots, m$ とし, $x_1, \cdots, x_m$ が B 上整であることを示す. x_i は $\mathbf{F}_q[V_1]^{G_1}$ 上整なので

$$f(X) = X^r + f_{r-1}(a_1, \cdots, a_m)X^{r-1} + \cdots + f_0(a_1, \cdots, a_m) \in \mathbf{F}_q[V_1]^{G_1}[X]$$

で

$$f(x_i) = 0$$

となる $f(X)$ と m 変数の多項式 $f_0, \cdots, f_{r-1}$ が存在する.

$$g(X) = \mathcal{O}(X)^r + f_{r-1}(a'_1, \cdots, a'_m)\mathcal{O}(X)^{r-1} + \cdots + f_0(a'_1, \cdots . a'_m)$$

とおくと $c_{n,n} = 1$, $c_{n,k} \in \mathbf{F}_q[V_2]^{G_2}$ なので $g(X)$ は B 上のモニックな $q^n r$ 次の多項式となる. また,

$$g(x_i) = 0$$

も明らかなので, x_i が B 上整であることがいえる.

最後に次数と位数の計算を行う.

$$\deg \mathcal{O}(x_i) = q^n$$

なので

$$\deg a'_1 \cdots \deg a'_m = |G_1| \times q^{mn}.$$

さらに

$$\deg a'_{m+1} \cdots \deg a'_{m+n} = |G_2|$$

なので

$$\deg a'_1 \cdots \deg a'_{m+n} = |G_1| \times |G_2| \times q^{mn} = |G|.$$

これで定理 3 による定理 2 の証明が完了する.

参考文献

[1] K. Andersen, J. Grodal, J. Møller and A. Viruel, *The classification of p-compact groups for p odd.* preprint arXiv:math.AT/0302346 v1 27 Feb 2003.

[2] M. Mimura and Y. Sambe, *On the cohomology mod p of classifying spaces of the exceptional Lie groups, II, III.* J. Math. Kyoto Univ. **20-2** (1980) 327–349, 351–379.

[3] H. Toda, *Cohomology mod 3 of the classifying space BF_4 of teh exceptional Lie group F_4.* J. Math. Kyoto Univ. **13-1** (1973) 97–115.

[4] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring: I.* Annals of Math. **94** (1971) 549–572.

[5] C. W. Wilkerson, *A primer on the Dickson invariants.* Proc. Northwestern Homotopy Conference, Contemporary Mathematics **18** (Amer. Math. Soc., Province, RI) 421–434. (corrected version available at the Hopf Topology Archive)